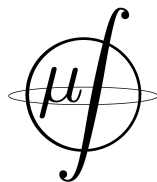


Skript

Mathematik I für Ökonomen

Thiemo M. Kessel & Johannes Sauter

Dezember 2009



mathekurse.ch



Vorwort

Dieses Skript behandelt grundlegende mathematische Eigenschaften von Funktionen einer und zweier Variablen. Dabei wird besonderer Wert auf Anschauung und Übersichtlichkeit gelegt. Die Beispiele am Ende jeden Abschnitts sollen zum besseren Verständnis der mathematischen Inhalte beitragen und basieren auf früheren Prüfungsaufgaben an der HSG. Für die Wirtschaftswissenschaften nützliche Begriffe ergänzen das Skript und werden systematisch im Skript *Mikroökonomik II* von *mathekurse.ch* wieder aufgegriffen.

Die Grundlage des Skripts bilden unsere langjährigen Erfahrungen aus den gemeinsamen Mathematikkursen an der HSG. An dieser Stelle möchten wir uns vor allem bei David Pumberger für seine Hilfe und die gute Zusammenarbeit bei *mathekurse.ch* bedanken.

Zürich, im Dezember 2009,

Thiemo M. Kessel
Johannes Sauter

Alle Rechte vorbehalten
© mathekurse.ch, 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen einer Variable	3
1.1 Definitions- und Wertebereich einer Funktion	3
1.2 Umkehrfunktion einer Funktion	5
2 Folgen und Reihen	6
2.1 Folgen	6
2.2 Reihen	8
2.3 Ökonomische Anwendungen	9
3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	11
4 Differentialrechnung für Funktionen einer Variable	14
4.1 Erste Ableitung einer Funktion	14
4.2 Differential einer Funktion	16
4.3 Ökonomische Anwendungen	17
5 Kurvendiskussion	20
5.1 Monotonie und Krümmung	20
5.2 Extrem- und Wendestellen	21
6 Taylorsches Polynom	22
7 Funktionen zweier Variablen	24
8 Differentialrechnung für Funktionen zweier Variablen	26
8.1 Partielle Ableitungen einer Funktion	26
8.2 Totales Differential einer Funktion	29
8.3 Tangenten einer Niveaulinie	30
8.4 Ökonomische Anwendungen	31
9 Homogene Funktionen zweier Variablen	32

1 Funktionen einer Variable

Mit dem wichtigen Begriff der Funktion einer Variable, welcher nun als erstes eingeführt werden soll, lassen sich viele Zusammenhänge in der Natur – und selbstverständlich auch in der Wirtschaft – beschreiben.

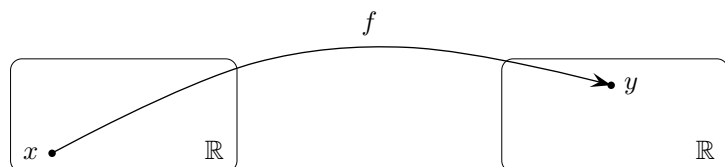


Abbildung 1: Die Funktion.

Ausgangspunkt sind die reellen Zahlen \mathbb{R} . Diese werden als die *Variable* der Funktion mit x bezeichnet. Jeder einzelnen dieser Zahlen x wird eindeutig eine Zahl y zugeordnet. Wie diese Zuordnung erfolgen soll, wird durch eine *Funktion* f vorgegeben:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x).$$

Deshalb nennt sich die dem x durch die Funktion f zugeordnete Zahl y auch *Funktionswert* von x , und die Schreibweise $y = f(x)$ ist üblich. Ausserdem können Funktionen einer Variablen in der Ebene als *Graph* oder *Kurve* dargestellt werden. Auf dem Graphen einer Funktion f liegen dann genau die Punkte P mit den Koordinaten $(x, y = f(x))$.

1.1 Definitions- und Wertebereich einer Funktion

Häufig kommt es vor, dass durch eine Funktion nicht allen Zahlen in \mathbb{R} ein y zugeordnet werden kann, sondern nur denjenigen, welche sich in dem sogenannten *Definitionsbereich* $D \subset \mathbb{R}$ befinden. Ähnlich können manchmal die Funktionswerte einer Funktion nicht alle Zahlen in \mathbb{R} abdecken, und sie liegen dann lediglich in dem sogenannten *Wertebereich* $W \subset \mathbb{R}$.

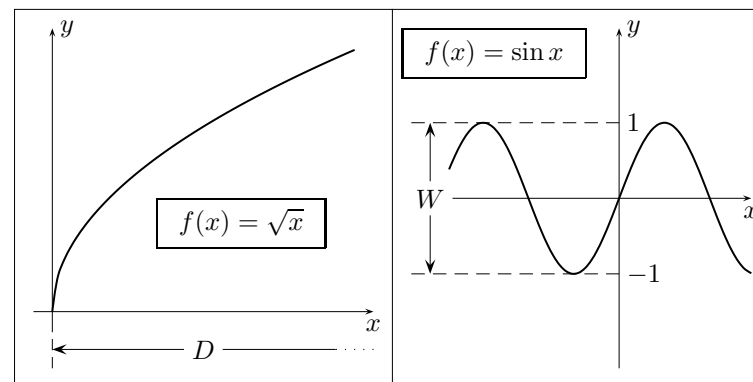


Abbildung 2: Der Definitions- und Wertebereich einer Funktion.

Beispiel 1: Definitions- und Wertebereich von

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

a) Definitionsbereich: Wegen der Wurzelfunktion

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$



b) Wertebereich: Wegen der Sinusfunktion

$$W = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}.$$

□

Beispiel 2: Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right).$$

a) Definitionsbereich: Wegen der Logarithmusfunktion

$$\frac{x-1}{x+2} > 0.$$

Umschreiben in Produktform ergibt

$$\frac{x-1}{x+2} = (x-1) \cdot \frac{1}{x+2} > 0.$$

Für jedes Produkt gilt:

Ein Produkt ist dann *grösser* null, wenn beide Faktoren entweder positiv oder negativ sind.

Ein Produkt ist dann *kleiner* null, wenn ein Faktor positiv (negativ) und der andere negativ (positiv) ist.

Fallunterscheidung

Erster Fall:

Zweiter Fall:

$$(x-1) > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{x+2} > 0$$

$$(x-1) < 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{x+2} < 0$$

$$x > 1 \quad \text{und} \quad x > -2$$

$$x < 1 \quad \text{und} \quad x < -2$$

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}.$$

Zusammengefasst gilt

$$D = D_1 \cup D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}.$$

b) Wertebereich: Aus dem Definitionsbereich D_1 folgt

$$W_1 = \{y \in \mathbb{R} : -\infty < y < 0\}.$$

Aus dem Definitionsbereich D_2 folgt

$$W_2 = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < +\infty\}.$$

Zusammengefasst gilt

$$W = W_1 \cup W_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

□

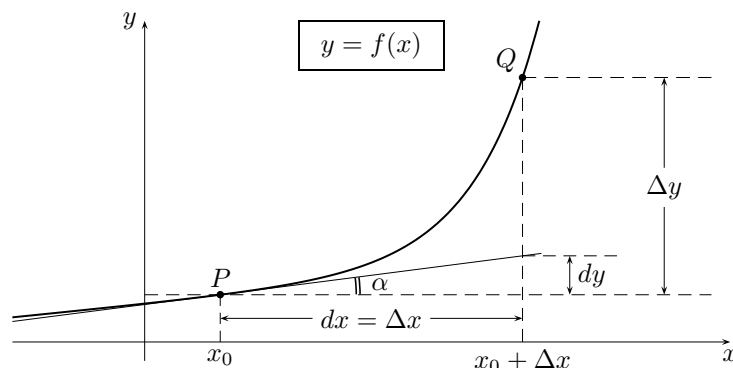


Abbildung 9: Das Differential einer Funktion.

Beispiel 18: Differential an der Stelle $x_0 = 2$ und linearer Näherungswert für den Funktionswert $f(2.01)$ von

$$f(x) = \left(\ln \frac{x}{2}\right)^2 + 2x^2.$$

Erste Ableitung

$$f'(x) = 2 \ln \left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{x} + 4x.$$

Somit gilt für das Differential an der Stelle $x_0 = 2$

$$df(2) = f'(2) dx = \left(2 \ln \left(\frac{2}{2}\right) \frac{1}{2} + 4 \cdot 2\right) dx = 8 dx.$$

Die Änderung ist $dx = 2.01 - 2 = 0.01$, woraus für den linearen

Näherungswert folgt

$$f_{lin}(2.01) = f(2) + df(2) = 8 + 8 \cdot 0.01 = 8.08.$$

Dieser ist eine Näherung von

$$f(2.01) = \left(\ln \frac{2.01}{2}\right)^2 + 2 \cdot 2.01^2 \approx 8.0802.$$

Somit beträgt die Differenz zwischen dem Funktionswert $f(2.01)$ und dem linearen Näherungswert $f_{lin}(2.01)$ lediglich ungefähr $2/10\,000$. \square

4.3 Ökonomische Anwendungen

Im ökonomischen Kontext ist für eine gegebene differenzierbare Funktion $y = f(x)$ der Quotient

$$\frac{\text{Relative Änderung des Funktionswertes}}{\text{Relative Änderung der Variable}}$$

von Bedeutung. Genauer schreibt sich dieser Quotient an einer Stelle x_0 als

$$\frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{x_0}{f(x_0)}. \quad (31)$$

Für infinitesimale Änderungen – also im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ – wird von der Elastizität der Funktion gesprochen.