

Skript

Mathematik II für Ökonomen

Thiemo M. Kessel & Johannes Sauter

Februar 2010



mathekurse.ch



Vorwort

Dieses Skript behandelt zunächst weitere grundlegende mathematische Eigenschaften von Funktionen zweier Variablen und gibt dann eine Einführung in die Integrationstheorie von Funktionen einer Variable. Dabei wird auf den ersten Teil *Mathematik I für Ökonomen* des Skripts systematisch aufgebaut. Verweise auf diesen ersten Teil sind mit der Ergänzung I versehen.

Die nachfolgenden Abschnitte beschäftigen sich dann mit der Matrixrechnung und insbesondere mit linearen Gleichungssystemen. Die für die Wirtschaftswissenschaften wichtigen Differenzgleichungen werden abschliessend behandelt. Die Beispiele am Ende jeden Abschnitts sollen zum besseren Verständnis der mathematischen Inhalte beitragen und basieren auf früheren Prüfungsaufgaben an der HSG.

Die Grundlage des Skripts bilden unsere langjährigen Erfahrungen aus den gemeinsamen Mathematikkursen an der HSG. An dieser Stelle möchten wir uns vor allem bei David Pumberger für seine Hilfe und die gute Zusammenarbeit bei *mathekurse.ch* bedanken.

Zürich, im Februar 2010,

Thiemo M. Kessel
Johannes Sauter

Alle Rechte vorbehalten
© mathekurse.ch, 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Extremstellen für Funktionen zweier Variablen	1
2	Extremstellen unter Nebenbedingungen für Funktionen zweier Variablen	2
3	Gradient für Funktionen zweier Variablen	4
4	Integralrechnung für Funktionen einer Variable	5
4.1	Bestimmtes Integral und Flächeninhalt	6
4.2	Stammfunktion und Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	8
4.3	Vergleich von Differential- und Integralrechnung	10
4.4	Integrationsmethoden	11
4.5	Uneigentliche Integrale	15
5	Vektorrechnung	17
6	Matrixrechnung	19
6.1	Definitionen und Rechenoperationen für Matrizen	19
6.2	Determinante und Inverse	23
6.3	Rang einer Matrix	26
7	Lineare Gleichungssysteme	28
7.1	Existenz- und Eindeutigkeitskriterien	28
7.2	Gaußscher Algorithmus	30
8	Eigenwerte und Eigenvektoren	34
9	Differenzgleichungen	37

1 Extremstellen für Funktionen zweier Variablen

Der Begriff der Extremstelle für Funktionen einer Variable aus Kapitel I 5 soll auf Funktionen zweier Variablen erweitert werden. Eine *Extremstelle* (x_0, y_0) einer Funktion $z = f(x, y)$ besitzt eine horizontale Tangentialebene im Punkt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ und erfüllt somit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Notwendiges Kriterium

Da umgekehrt nicht jede Stelle mit einer horizontalen Tangentialebene eine Extremstelle ist (Beispiel: $f(x, y) = x^2 - y^2$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$), braucht es noch ein zusätzliches Kriterium für die Existenz einer solchen. Für ein *Maximum* an der Stelle (x_0, y_0) nämlich muss gelten

$$f(x_0, y_0) = \text{Max} \iff \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{und} \quad f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0, \end{cases} \tag{2}$$

Hinreichendes Kriterium

und für ein *Minimum* an der Stelle (x_0, y_0)

$$f(x_0, y_0) = \text{Min} \iff \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{und} \quad f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Hinreichendes Kriterium

Der Vergleich mit Kapitel I 5.2 zeigt, dass im Fall von Funktionen zweier Variablen die hinreichenden Kriterien für ein Maximum oder Minimum durch die Bedingung

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0 \tag{4}$$

ergänzt werden müssen. – Hat eine Stelle eine horizontale Tangentialebene und ist die linke Seite von (4) kleiner als null, so liegt an dieser Stelle ein *Sattelpunkt* vor.

Beispiel 1: Extremstellen von

$$f(x, y) = 8xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 8y - \frac{1}{x^2}, & f_{xx}(x, y) &= \frac{2}{x^3}, \\ f_y(x, y) &= 8x + \frac{1}{y^2}, & f_{yy}(x, y) &= -\frac{2}{y^3}, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 8. \end{aligned}$$

Notwendiges Kriterium (1) für Extremstelle

$$\begin{aligned} 8y - \frac{1}{x^2} &= 0 \iff y = \frac{1}{8x^2}, \\ 8x + \frac{1}{y^2} &= 0 \iff x = -\frac{1}{8y^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste liefert

$$y = \frac{1}{8x^2} = \frac{1}{8\left(-\frac{1}{8y^2}\right)^2} = \frac{1}{8} = 8y^4 \iff y = \frac{1}{2}, y = 0.$$

Daraus folgt für $y = 1/2$

$$x = -\frac{1}{8y^2} = -\frac{1}{8\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Für $y = 0$ ist das dazugehörige x nicht definiert.

Hinreichendes Kriterium (2) für *Maximum* bei $(-1/2, 1/2)$ erfüllt, da

$$f_{xx}(-1/2, 1/2) = -16 < 0 \quad \text{und} \quad f_{yy}(-1/2, 1/2) = -16 < 0,$$

sowie

$$f_{xx}(-1/2, 1/2) \cdot f_{yy}(-1/2, 1/2) - f_{xy}^2(-1/2, 1/2) = (-16)^2 - 8^2 = 192 > 0.$$

□

2 Extremstellen unter Nebenbedingungen für Funktionen zweier Variablen

In den Wirtschaftswissenschaften kommt es häufig vor, dass Extremstellen unter sogenannten Nebenbedingungen zu bestimmen sind. Ein Beispiel dafür ist die Optimierung der Kosten unter der Nebenbedingung einer vorgegebenen Produktion (siehe Beispiel 2 unten).

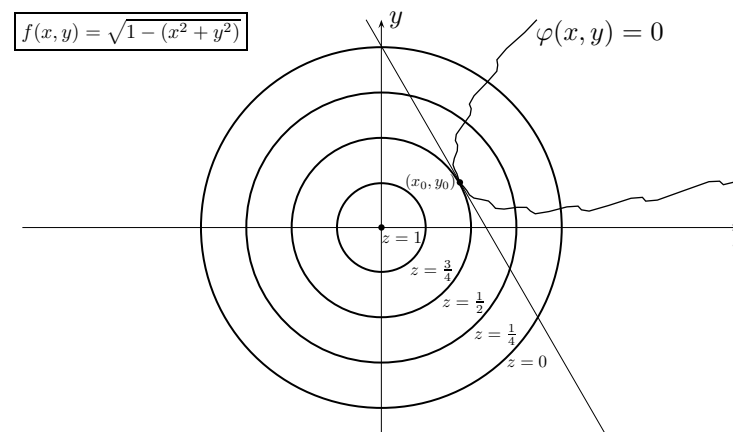


Abbildung 1: Extremstelle (x_0, y_0) unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$.

Es wird angenommen, dass die beiden Variablen x und y einer Funktion $z = f(x, y)$ nicht mehr unabhängig voneinander gewählt werden können, sondern durch eine *Nebenbedingung* miteinander verbunden sind. Diese lässt